«قابليّة القسمة»

د. إلياس عبّود

1. مقدّمة :

موضوع قابليّة القسمة يُدَرَّس في المرحلة الابتدائيّة [1] ، وهو يُعنى بقوانين بسيطة لفحص قابليّة القسمة للأعداد الصحيحة على عدد ما باستعمال منازل (أرقام) العدد بدون تنفيذ عمليّة القسمة .

سنطلق على هذه القوانين اسم «قوانين القسمة» أو «نظريّات قابليّة القسمة» . ليكن a ، b عددين صحيحين . نقول : إنّ العدد b يقبل القسمة على a (بدون باقٍ) ، إذا كان b / a هو عدد صحيح . فمثلاً 8 يقبل القسمة على 1 ، 2 ، 4 ، 8 ولا يقبل القسمة على 3 .

ننصّ الآن قوانين القسمة الشائعة [3, p. 320]

1. قانون القسمة على 2 :

إذا كانت منزلة الآحاد زوجيّة ، فإنّ العدد يقبل القسمة على 2 .

2. قانون القسمة على 3 :

إذا كان مجموع أرقام العدد يقبل القسمة على 3 ، فإنّ العدد يقبل القسمة على 3 .

3. قانون القسمة على 4 :

إذا كان العدد المؤلّف من منزلتي الآحاد والعشرات يقبل القسمة على 4 ، فإنّ العدد

يقبل القسمة على 4 .

4. قانون القسمة على 5 :

إذا كانت منزلة الآحاد صفرًا أو 5 ، فإنّ العدد يقبل القسمة على 5 .

5. قانون القسمة على 6 :

إذا كانت منزلة الآحاد زوجيّة ومجموع أرقام العدد يقبل القسمة على 3 ، فإنّ العدد يقبل القسمة على 6 .

6. قانون القسمة على 8 :

إذا كان العدد المؤلّف من منازل الآحاد والعشرات والمئات يقبل القسمة على 8 ، فإنّ العدد يقبل القسمة على 8 .

7. قانون القسمة على 9 :

إذا كان مجموع أرقام العدد يقبل القسمة على 9 ، فإنّ العدد يقبل القسمة على 9 .

8. قانون القسمة على 11 :

إذا كان الفرق بين مجموع المنازل التي ترتيبها زوجيّ وبين مجموع المنازل التي ترتيبها فرديّ يقبل القسمة على 11 ، فإنّ العدد يقبل القسمة على 11 .

سنذكر لاحقًا قانون القسمة على 7 . هذا ويمكن نصّ هذه القوانين باستعمال التكافؤ ($\Leftrightarrow$) بدل الاقتضاء أو الشرط ؛ فإنّ جميع هذه الشروط هي كافية وضروريّة أيضًا ؛ فمثلاً يمكن نصّ قانون القسمة على 2 باستعمال التكافؤ كالآتي :

العدد يقبل القسمة على 2 $\Leftrightarrow$ منزلة الآحاد فيه هي زوجيّة ؛ فلنلاحظ أيضًا أنّ قانون القسمة على 6 هو دمج لقانوني القسمة على 2 و 3 . السبب في ذلك هو أنّ العددين 2

و 3 هما غريبان ، أي أنّ القاسم المشترك الأعظم لهما هو 1 .

يمكن بذات الطريقة دمج قانوني القسمة على 3 و 4 ، لنحصل على قانون للقسمة على 12 . لكن لا يمكن دمج قانوني القسمة على 2 و 4 ، لنحصل على قانون القسمة على 8 . هناك فعلاً أعداد صحيحة كثيرة ، تحقّق قانوني القسمة على 2 و 4 ، لكنّها لا تقبل القسمة على 8 ، نحو 12 .

السبب في ذلك هو أنّ القاسم المشترك الأعظم للعددين 2 و 4 هو ليس 1 .

سنقوم ببرهان هذه القوانين ومن ثمّ إعطاء خوارزميّات لفحص قابليّة القسمة بواسطة تشطيب منزلة الآحاد وطرح مضاعفاتها من العدد الناتج .

سنطبّق الطريقة الأخيرة للعددين 7 و 13 ، كما ويمكن تطبيقها لكلّ عدد طبيعيّ سواء كان أوليّا أم لا .

2. تمثيل الأعداد الصحيحة في الميزان العشريّ :

ليكن x عدداً طبيعيّا فيه a_0 منزلة الآحاد ، a_1 منزلة العشرات ، a_2 منزلة المئات وبشكل عامّ a_k منزلة 10^k ، فإنّ تمثيل العدد x في الميزان العشريّ يكون على المنوال التالي :

$$x = 10^k a_k + ... + 100a_2 + 10a_1 + a_0$$

ليكن العدد

$$y = 10^{k-1} a_k + ... + 10a_2 + a_1$$

واضح أنّه يتحقّق

$$x = 10y + a_0$$

لنلاحظ أنّ y هو العدد الناتج من تشطيب (حذف) منزلة الآحاد في x . لنلاحظ أيضًا أنّ صورة العدد $10a_1 + a_0$ تمثّل العدد المؤلّف من منزلة الآحاد والعشرات في x .

كمـا أنّ صـورة العـدد $100\,a_2 + 10\,a_1 + a_0$ تُمـثّل العـدد المؤلّف من منازل الآحـاد والعشرات والمئات في x .

3. قابليّة القسمة :

تعريف «قابليّة القسمة» :

ليكن a و b عددين صحيحين . نقول : إنّ «a يقسم b» أو «b يقبل القسمة على a» أو «b ينقسم على a بدون باقٍ» أو «b من مضاعفات a» ، إذا كان b/a هو عدد صحيح . أي أنّه يوجد عدد صحيح c ، حيث أنّ $b = ac$.

نكتب بالرموز $a|b$ ونقرأها «a يقسم b» ؛ فمثلاً $2|4$ ، لأنّ $4/2=2$. كذلك $3|12$ ، لأنّ $12/3=4$ ، لكن «3 لا يقسم 5» وكذلك «4 لا يقسم 2» .

فلنلاحظ أنّنا في هذا التعريف نستثني الحالة التي فيها $a = 0$.

تعريف «نظريّة لقابليّة القسمة» :

نظريّة أو قانون لقابليّة القسمة على العدد الطبيعيّ n هو ادّعاء من الصورة :

$$n|f(a_0, a_1, ..., a_k) \Leftrightarrow n|x$$

حيث أنّ $f(a_0, a_1, ..., a_k)$ هـي دالّة بمنازل العدد x .

بالكلمات نقول: x يقبل القسمة على $n \Leftrightarrow f(a_0, a_1, ..., a_k)$ يقبل القسمة على n .

مثلاً في قانوني القسمة على 3 و 4 :

$$f(a_0, a_1, ..., a_k) = a_0$$

في قانوني القسمة على 3 و 9 :

$$f(a_0, a_1, ..., a_k) = a_0 + a_1 + ... + a_k$$

في قانوني القسمة على 4 :

$$f(a_0, a_1, ..., a_k) = 10\,a_1 + a_0$$

في قانوني القسمة على 8 :

$$f(a_0, a_1, ..., a_k) = 100\,a_2 + 10a_1 + a_0$$

في قانوني القسمة على 11 :

$$f(a_0, a_1, ..., a_k) = (a_0 + a_2 + ...) - (a_1 + a_3 + ...)$$

حيث أنّ $(a_0 + a_2 + ...)$ هو مجموع المنازل التي ترتيبها زوجيّ ،

بينما $(a_1 + a_3 + ...)$ هو مجموع المنازل التي ترتيبها فرديّ .

4. براهين قوانين القسمة :

نبرهن الآن قوانين القسمة 8-1 التي ذكرناها آنفًا . سنعتمد هنا على الخاصّة التالية لقسمة الأعداد الصحيحة (يُنظر [3, p. 321]) .

نظريّة 4.1 :

إذا كان $x = nt + z$ ، حيث أنّ x, z, t هي أعداد صحيحة و n عدد طبيعيّ ، فإنّ

$$n|z \Leftrightarrow n|x$$

بالكلمات : إذا كان $x = nt + z$ ، فإنّ x يقبل القسمة على $n \Leftrightarrow z$ يقبل القسمة على n .

البرهان : إذا تحقّق $n|z$ ، فإنّ $z=nc_1$ ، فينتج من المعطى أنّ

$$x = nt + nc_1 = n(t + c_1)$$

لذا $n|x$.

وبالعكس ، إذا تحقّق $n|x$ ، فإنّ $x = nc_2$ ، فينتج أنّ
$z = nc_2 - nt = n(c_2 - t)$ ، لذا $n|z$.

يمكن برهان نظريّة عامّة أكثر من نظريّة 4.1 ؛ فإنّ المعادلة $x=nt+z$ تكافئ أنّه للعددين x و z يوجد نفس الباقي بالقسمة على n ؛ فإمّا أنْ يكون الباقي صفرًا لكليهما أو لا . فإنْ قَبِل أحدهما القسمة على n ، (أي أنّ باقي القسمة على n هو صفر) ، قَبِل الآخر القسمة على n وبالعكس .

مثلاً ، إذا كان $x = 5t + z$ ، فإنّ $5|x \Leftrightarrow 5|z$.

وإذا كان $x = 6t + z$ وكان 6 لا يقسم z ، فإنّ 6 بالضرورة لا يقسم x .

كمثال حسابيّ ، نأخذ العدد $68 = 6 \cdot 10 + 8$. بما أنّ 6 لا يقسم 8 ، فبالضرورة 6 لا يقسم 68 . هذا وباقي القسمة على 6 للعددين 8 و 68 هو 2 .

برهان قانوني القسمة على 2 و 5 :

حسب ما أوردناه سابقًا بالنسبة لتمثيل الأعداد الصحيحة في الميزان العشريّ نستطيع أنْ نكتب : $x = 10y + a_0$.

حيث أنّ a_0 هي منزلة الآحاد في x ، لكن $10y = 2(5y) = 2t_1$.

من هنا $x = 2t_1 + a_0$ وحسب نظريّة 4.1 ينتج قانون القسمة على 2 : $2|x \Leftrightarrow 2|a_0$.

بشكل مماثل نستطيع أنْ نكتب المعادلة : $x = 10y + a_0 = 5t_2 + a_0$

فنحصل على قانون القسمة على 5 .

برهان قانوني القسمة على 3 و 9 :

نكتب التمثيل العشريّ للعدد x كمجموع صورتي عددين كالآتي :

$$x = [(10^k - 1)\, a_k + \ldots + 99\, a_2 + 9\, a_1] + [a_k + \ldots + a_2 + a_1 + a_0]$$

لكن 999 وبشكل عامّ $10^k - 1$ هي من مضاعفات 3 وأيضًا من مضاعفات 9 .

وفعلاً إن نطرح 1 من 10^k ، نحصل على عدد ، منازله جميعها هي 9 ؛ فهو إذًا من مضاعفات 9 وبالتالي من مضاعفات 3 .

نستطيع أنْ نكتب إذن : $x = 3t_1 + [a_k + \ldots + a_2 + a_1 + a_0]$.

وحسب نظريّة 4.1 ينتج قانون القسمة على 3 .

بالمثل ، نستطيع أنْ نكتب $x = 9t_2 + [a_k + \ldots + a_2 + a_1 + a_0]$.

وحسب نظريّة 4.1 ينتج قانون القسمة على 9 .

برهان قانوني القسمة على 4 و 8 :

فلنلاحظ أوّلاً أنّنا نستطيع كتابة العدد $x = 100y_1 + (10a_1 + a_0)$.

حيث أنّ y_1 هو العدد الناتج من تشطيب منزلتي الآحاد والعشرات في x .

لكن بما أنّه $100y_1 = 4t$ ، فإنّ $x = 4t + (100a_1 + a_0)$. من هنا ، حسب نظريّة 4.1 ينتج : $4 | 100a_1 + a_0 \Leftrightarrow 4 | x$

بالمثل نستطيع أنْ نكتب :

$$x = 1000y_2 + (100a_2 + 10a_1 + a_0)$$

فنحصل على قانون القسمة على 8 .

برهان قانوني القسمة على 6 :

بما أنّ العددين 2 و 3 هما غريبان ، فإنّ $6 | x \Leftrightarrow 3 | x$ وأيضًا $2 | x$ (ينظر [23 ,2, p. 23]) .

من هنا نستطيع أنْ ندمج قانوني القسمة على 2 و 3 ، لنحصل على قانون القسمة على 6 .

برهان قانوني القسمة على 11 :

فلنلاحظ أوّلاً أنّ الأعداد 11 ، 1001 ، 100001 وبشكل عامّ $10^m + 1$ لكلّ m فرديّ تقبل القسمة على 11 .

أيضًا الأعداد 99 ، 9999 ، 999999 وبشكل عامّ $10^m - 1$ لكلّ m زوجيّ تقبل القسمة على 11 .

من هنا ، فإنّ التمثيل العشريّ للعدد x يعطي المعادلة :

$$x = 11t + (a_0 + a_2 + a_4 + ...) - (a_1 + a_3 + a_5 + ...)$$

وحسب نظريّة 4.1 نحصل على قانون القسمة على 11 .

ملاحظة :

لتبسيط برهان القسمة على 11 نعطي التحليل الملائم لعدد مؤلّف من خمس منازل . ليكن :

$$x = 10000a_4 + 1000a_3 + 100a_2 + 10a_1 + a_0$$

فإنّه :

$$x = (9999a_4 + 1001a_3 + 99a_2 + 11a_1) + (a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0)$$

من هنا :

$$x = 11\ (909a_4 + 91a_3 + 9a_2 + a_1) + (a_4 + a_2 + a_0) - (a_3 + a_1)$$

مثال : ليكن $x = 9029812$.

هذا العدد يقبل القسمة على 2 ، لأنّ منزلة الآحاد فيه زوجيّة . ويقبل القسمة على 4 ، لأنّ العدد المؤلّف من منزلتي الآحاد والعشرات فيه ، وهو 12 ، يقبل القسمة على 4 .

وهو يقبل القسمة على 11 ، لأنّ $11 = (1 + 9 + 0) - (2 + 8 + 2 + 9)$.

وهو لا يقبل القسمة على 3 ولا على 9 ، لأنّ مجموع منازله 31 لا يقبل القسمة على 3 ولا على 9 .

وهو لا يقبل القسمة 8 ، لأنّ 812 لا يقبل القسمة على 8 .

وهو لا يقبل القسمة 6 ، لأنّه لا يقبل القسمة على 3 .

5. قانون القسمة على 7 :

قانون القسمة على 7 غير بسيط كغيره من القوانين التي ذكرناها . مع ذلك ، فهو يُسَهِّل نوعًا ما فحص قابليّة القسمة على 7 .

نظريّة (قابليّة القسمة على 7) :

$$7 | x \Leftrightarrow 7 | (a_0 + 3a_1 + 2a_2 - a_4 - 3a_5 - 2a_6 + a_7 + 3a_8 + ...)$$

بالكلمات : العدد x يقبل القسمة على 7 يكافىء أنّ 7 يقسم العدد الناتج من حاصل جمع منزلة الآحاد وثلاثة أضعاف منزلة العشرات وضعفي منزلة المئات وحاصل طرح منزلة الآلاف وثلاثة أضعاف منزلة عشرات الآلاف وضعفي منزلة مئات الآلاف وهكذا دواليك .

البرهان : نقسم قُوى 10 على 7 كالآتي :

$1 = 0 \cdot 7 + 1$

$10 = 1 \cdot 7 + 3$

$100 = 14 \cdot 7 + 2$

$1000 = 142 \cdot 7 + 6 = 143 \cdot 7 - 1$

$10000 = 1428 \cdot 7 + 4 = 1429 \cdot 7 - 3$

$100000 = 14285 \cdot 7 + 5 = 14286 \cdot 7 - 2$

ثمّ إنّ متوالية الأعداد 1 ,3 ,2 ,1- ,3- ,2- تعود على نفسها بشكل دوريّ ، عندما نقسم 10^i على 7 لكل $i \geq 6$.

إِذَنْ نستطيع أنْ نكتب :

$$x = 7t + (a_0 + 3a_1 + 2a_2 - a_4 - 3a_5 - 2a_6 + \dots)$$

وحسب نظريّة 4.1 النتيجة تنبع .

لتطبيق نظريّة قابليّة القسمة على 7 ، نبني جدولاً ، فيه سطران . في السطر الأوّل نكتب منازل العدد من اليمين إلى اليسار ابتداءً من منزلة الآحاد . في السطر الثاني نكتب حدود المتوالية (أيضًا من اليمين إلى اليسار) :

$$\dots, 2, 3, 1, -2, -3, -1, 2, 3, 1$$

هذا ونأخذ عدد الحدود في المتوالية كعدد المنازل ، ثمّ نضرب حدود السطرين على التناظر ونجمع ؛ فإنْ كان العدد الناتج يقبل القسمة على 7 ، كان العدد الأصليّ يقبل القسمة على 7 .

أمثلة : نفحص قابليّة القسمة على 7 بالنسبة للأعداد التالية :

1. $x = 1015$. نبني الجدول التالي :

1	0	1	5
-1	2	3	1

ثمّ نضرب حدود السطر الأوّل بالثاني على التناظر ونجمع ، فنحصل على العدد 7 . بما أنّ 7 يقبل القسمة على 7 ، فإنّ 1015 يقبل القسمة على 7 .

2. $x = 23906$. الجدول الملائم هو :

2 3 9 0 6

-3 -1 2 3 1

نضرب ونجمع ، فنحصل على العدد 15 ، لكن 7 لا يقسم 15 ، من هنا 23906 لا يقبل القسمة على 7 .

3. $x = 7188314$. نبني الجدول :

7 1 8 8 3 1 4

1 -2 -3 1- 2 3 1

نضرب ونجمع ، فنحصل على العدد 14- . بما أنّ 14- يقبل القسمة على 7 ، فإنّ العدد 7188314 يقبل القسمة على 7 .

6. خوارزميّات لفحص قابليّة القسمة :

الخوارزميّة (Algorithm) كلمة مأخوذة من اسم العالم العربيّ الشهير الخوارزميّ . بالنسبة لنا هي طريقة ، فيها سلسلة من المراحل المتعلّقة ببعضها ، تعطي النتيجة بعد تطبيقها عددًا نهائيًا من المرّات .

الخوارزميّات لفحص قابليّة القسمة على عدد ما ، تقوم على تشطيب منزلة الآحاد ، ثمّ طرح (أو جمع) مضاعفاتها للعدد الناتج وهكذا دواليك . فحتمًا بعد عدد نهائيّ من المرّات (على الأكثر كعدد المنازل) نحصل على النتيجة . نستطيع بناء خوارزميّة لقابليّة القسمة n ، لكلّ عدد طبيعيّ n .

سنقتصر البحث هنا في الحالتين $n = 7$ و $n = 13$.

ليكن معطى العدد الصحيح x ومنزلة آحاده a_0 . نكتب x في الصيغة التالية

$$x = 10y + a_0$$

حيث أنّ y هو العدد الناتج من تشطيب منزلة الآحاد (أي a_0) في x .

نظريّة أ : $7|x \Leftrightarrow 7|\ y\ -2a_0$

بالكلمات : 7 يقسم العدد x يكافىء 7 يقسم العدد الناتج من تشطيب منزلة الآحاد وطرح ضعفيها .

نظريّة ب : $13|x \Leftrightarrow 13|\ y\ +4a_0$

بالكلمات : 13 يقسم العدد x يكافئ 13 يقسم العدد الناتج من تشطيب منزلة الآحاد وجمع أربعة أضعافها .

برهان نظريّة أ : نكتب المعادلة :

$$x = 10y + a_0 = 10(y - 2a_0) + 21a_0 = 10(y - 2a_0) +7(3a_0)$$

حسب نظريّة 4.1 يتحقّق إذن :

$$7|x \Leftrightarrow 7|10\ (y - 2a_0) \Leftrightarrow 7|y - 2a_0$$

وذلك لأنّ 7 و 10 هما عددان غريبان [يُنظر 2. p. 21] .

برهان نظريّة ب :

$$x = 10y + a_0 = 10(y + 4a_0) - 39a_0$$

اعتماداً على تفسير مشابه ، كما في برهان نظريّة أ نحصل على النتيجة

$$13|x \Leftrightarrow 13|y + 4a_0$$

ملاحظة : في نظريّة أ نستطيع أنْ نجمع $5a_0$ بدل أنْ نطرح $2a_0$ ، بينما في نظريّة ب نستطيع أنْ نطرح $9a_0$ بدل أنْ نجمع $4a_0$.

اخترنا هنا المضاعف الأصغر من بين الاثنين .

نختم في بعض الأمثلة :

1. نطبّق خوارزميّة القسمة على 7 بالنسبة للعدد 45311 .

نشطب منزلة الآحاد ونطرح ضعفيها :

$$\begin{array}{r} 4531 \\ -\quad 2 \\ \hline 4529 \end{array}$$

ثمّ نشطب منزلة الآحاد من العدد 4529 ونطرح 18 :

$$\begin{array}{r} 452 \\ -18 \\ \hline 434 \end{array}$$

ثمّ نشطب منزلة الآحاد من العدد 434 ونطرح 8 :

$$\begin{array}{r} 43 \\ -8 \\ \hline 35 \end{array}$$

بما أنّ 35 يقبل القسمة على 7 ، فإنّ العدد الأصليّ 45311 يقبل القسمة على 7 .

2. نطبّق خوارزميّة القسمة على 13 بالنسبة للعدد 18012 .

نحذف منزلة الآحاد في كلّ مرّة ونجمع للعدد الناتج أربعة أضعافها .

أ.

$$\begin{array}{r} 1801 \\ +\ \ 8 \\ \hline 1809 \end{array}$$

ب.

$$\begin{array}{r} 180 \\ +36 \\ \hline 216 \end{array}$$

جـ.

$$\begin{array}{r} 21 \\ +24 \\ \hline 45 \end{array}$$

بما أنّ 45 لا يقبل القسمة على 13 ، فإنّ العدد 18012 لا يقبل القسمة على 13 .

ثبت المصادر والمراجع :

1. **واحد اثنان وثلاثة** ، الرياضيّات للمدرسة الابتدائيّة . مركز التكنولوجيا التربويّة ، 1998 .
2. A.dams & Goldstein: **Introduction to Number Theory**. Prentice-Hall, New Jersey, 1976.
3. Jerome E. Kaufmann: **Mathematics Is ...** . 2nd edition, Weber & Schmidt, Boston, 1981.